Tema 1

Fundamentos de acústica

1.1 Introducción

Definición del sonido

El sonido es una vibración mecánica que se transmite a través de un medio elástico, capaz de producir una sensación auditiva debido al cambio de presión que ejerce sobre el oído

En el aire se propaga como pequeñas fluctuaciones de la presión atmosférica, por encima y por debajo del valor estático

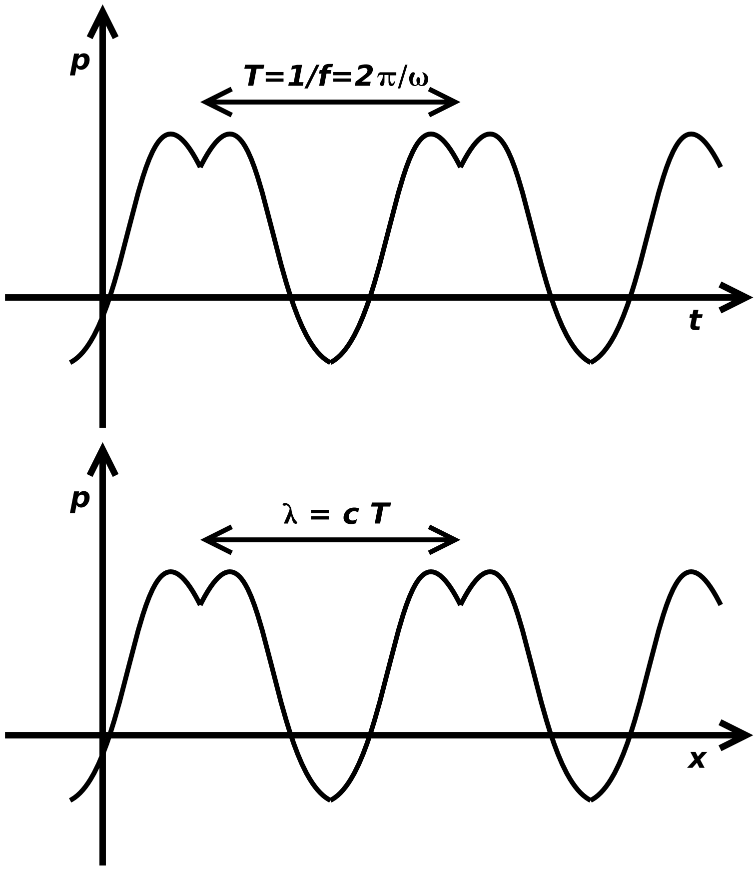
Presión acústica (sonora) p

$$p = P - P_0 \qquad \left[\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}\right]$$

P: Presión atmosférica total
P_0: Presión atmosférica estática ($= 1,013 \cdot 10^5$ N/m^2 al nivel del mar y 0 °C)

Ondas sonoras

Una *onda sonora* es una variación periódica de la presión acústica



T: periodo
f: frecuencia
ω: frecuencia angular
λ: longitud de onda
c: velocidad del sonido

Tonos puros

Ondas sonoras que en un punto del espacio varían según la fórmula

$$p\,(t) = A \;\mathrm{sen}\,(2\pi f\; t)$$

Sonidos periódicos

Ondas sonoras que, mediante el análisis de Fourier, se expresan como una suma de tonos puros

$$p = \sum_{n=1}^{N} A_n \;\mathrm{sen}\,(2\pi n f_0\; t)$$

Presión acústica eficaz p_{ef}

Valor cuadrático medio de la presión acústica en un punto a lo largo de un periodo T

$$p_{ef} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T p^2\,(t)\;dt\right]^{1/2}$$

Para tonos puros

$$p_{ef} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T (A\;\mathrm{sen}\,(2\pi f\; t))^2\;dt\right]^{1/2} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Nivel de presión sonora

Los sonidos audibles cubren un rango de presiones eficaces muy amplio. Para poder manejar ese rango tan amplio se introduce el *nivel de presión sonora*

$$SPL = 20 \, \log \frac{p_{ef}}{p_{ref}}$$

$p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2

Rango audible

0 dB$_{\mathrm{SPL}}$ – 120 dB$_{\mathrm{SPL}}$
16 Hz – 20 kHz

1.2 La ecuación de onda acústica

Se obtiene de ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos y de la termodinámica

Conservación de la masa

En un volumen arbitrario

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \int_S \rho\, \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$$

Aplicando el teorema de Gauss

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = \int_V \nabla\left(\rho\, \vec{u}\right)\, dV$$

Como el volumen de integración es arbitrario

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla\left(\rho\, \vec{u}\right)$$

Ley de conservación de la masa en la forma diferencial

Ecuación de Euler

Por la segunda ley de Newton, en un volumen de gas arbitrario pero pequeño, en el que la velocidad de las partículas se puede considerar constante en todo él

$$\int_V \rho \, \frac{d\vec{u}}{dt} \, dV = - \int_S P \cdot \vec{n} \, dS$$

$\vec{u}$ es función del tiempo y de la posición

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \, \vec{u}$$

Substituyendo y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \, \vec{u} \right) dV = - \int_V \nabla P \, dV$$

Al ser el volumen de integración arbitrario

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \, \vec{u} \right) = -\nabla P$$

Ecuación de Euler del movimiento en un fluido

Relación entre presión y densidad

Por la ley de los gases ideales

$$P = \rho R T$$

donde R es la constante de los gases ideales y T es la temperatura absoluta del gas

En una onda sonora el cambio de presión es adiabático: el periodo de oscilación es corto y no hay tiempo para intercambios de calor

Por la ley de los gases adiabáticos

$$P = K \rho^{\gamma}$$

donde K es una constante y γ es el coeficiente adiabático

Linealización

Para una onda sonora

$$P = P_0 + p \quad , \quad p << P_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad , \quad \rho' << \rho_0$$

$$\vec{u} = \vec{u} \quad , \quad \vec{u}_0 = 0$$

Ecuación linealizada de conservación de la masa

$$-\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 \nabla \vec{u}$$

Ecuación linealizada de Euler

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p$$

Ecuación lineal de estado

$$p = c^2 \rho' \qquad \left[c^2 = \gamma R T\right]$$

La ecuación de onda

Derivando las ecuaciones linealizadas de conservación de la masa y de Euler

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{u} \\ \rho_0 \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\nabla^2 p \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones

$$\nabla^2 p - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$$

Aplicando la ecuación lineal de estado

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Ecuación de onda sonora homogénea de presiones

Ecuación de energía

Multiplicando las ecuaciones linealizadas de conservación de la masa y de Euler

$$\begin{aligned} -p\frac{\partial \rho'}{\partial t} &= p\rho_0 \nabla \vec{u} \\ \vec{u}\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{u}\nabla p \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones

$$\nabla\left(p\vec{u}\right) = -\frac{p}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0\,\vec{u}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

Aplicando la ecuación lineal de estado

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \vec{I} = 0$$

Ecuación de energía

$$D = \frac{1}{2}\rho_0\left|\vec{u}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

Densidad de energía sonora

$$\vec{I} = p\vec{u}$$

Intensidad sonora [potencia por unidad de área]

Ondas planas

Cuando sólo existe dependencia de una coordenada cartesiana, x, y del tiempo; la ecuación de onda se reduce a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$p\left(x,t\right) = f\left(x - ct\right) + g\left(x + ct\right)$$

$f\left(x - ct\right)$ representa una onda plana que viaja en la dirección positiva de x con velocidad c
$g\left(x + ct\right)$ representa una onda plana viajando en la dirección negativa de x con velocidad c

La ecuación linealizada de Euler es

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

La solución es

$$u_x = \frac{f\left(x - ct\right)}{\rho_0 c} - \frac{g\left(x + ct\right)}{\rho_0 c}$$

Ondas esféricas

Cuando sólo existe dependencia con la distancia radial a un punto, r, y el tiempo; la ecuación de onda se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (pr)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$p(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{g(r+ct)}{r}$$

$f(r-ct)/r$ representa una onda esférica que se aleja del centro con velocidad c
$g(r+ct)/r$ representa una onda esférica que se aproxima al centro con velocidad c

La ecuación linealizada de Euler es

$$\rho_0 \frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

1.3 Representación compleja

Para ondas armónicas

$$\begin{aligned} p\,(\vec{r},\,t) &= \operatorname{Re}\left[\widehat{p}\,(\vec{r})\; e^{\jmath\,\omega\,t}\right] \\ u_i\,(\vec{r},\,t) &= \operatorname{Re}\left[\widehat{u}_i\,(\vec{r})\; e^{\jmath\,\omega\,t}\right] \end{aligned}$$

$\widehat{p}\,(\vec{r})$ y $\widehat{u}_i\,(\vec{r})$ son *amplitudes complejas*

Para ondas armónicas planas

$$\begin{aligned} \widehat{p}\,(x) &= \widehat{A}\,e^{-\jmath\,k\,x} + \widehat{B}\,e^{\jmath\,k\,x} \\ \widehat{u}_x\,(x) &= \frac{\widehat{A}}{\rho_0\,c}\,e^{-\jmath\,k\,x} - \frac{\widehat{B}}{\rho_0\,c}\,e^{\jmath\,k\,x} \end{aligned}$$

Para ondas armónicas esféricas

$$\widehat{p}\,(r) = \frac{\widehat{A}}{r}\,e^{-\jmath\,k\,r} + \frac{\widehat{B}}{r}\,e^{\jmath\,k\,r}$$

$$\widehat{u}_r\,(r) = \left(1 + \frac{1}{\jmath k r}\right)\frac{\widehat{A}\,e^{-\jmath\,k\,r}}{\rho_0\,c\,r} - \left(1 - \frac{1}{\jmath k r}\right)\frac{\widehat{B}\,e^{\jmath\,k\,r}}{\rho_0\,c\,r}$$

Operando con la representación compleja

La derivada respecto del tiempo es

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[\jmath\omega\,\widehat{p}\,e^{\jmath\,\omega t}\right]$$

La integral respecto del tiempo es

$$\int p\,dt = \mathrm{Re}\left[\frac{\widehat{p}\,e^{\jmath\omega}}{\jmath\,\omega t}\right]$$

El valor medio del producto de dos ondas es

$$\overline{p_1 p_2} = \frac{1}{T}\int_0^T p_1 p_2\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\widehat{p}_1\widehat{p}_2^*\right]$$

El valor eficaz es

$$p_{ef} = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\widehat{p}\,\widehat{p}^*\right]} = \frac{|\widehat{p}|}{\sqrt{2}}$$

1.4 Ecuación de Helmholtz

Es una versión particular de la ecuación de onda homogénea para las *amplitudes complejas* de las ondas armónicas

Se obtiene introduciendo la representación compleja en la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2 \,\mathrm{Re}\left[\widehat{p}\, e^{\jmath\omega t}\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Re}\left[\widehat{p}\, e^{\jmath\omega t}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[\nabla^2\,\widehat{p}\, e^{\jmath\omega t} + k^2\,\widehat{p}\, e^{\jmath\omega t}\right] = 0$$

$$\nabla^2\widehat{p} + k^2\,\widehat{p} = 0$$

La ecuación linealizada de Euler para las amplitudes complejas de ondas armónicas es

$$\jmath\,\omega\,\rho_0\,\vec{\widehat{u}} = -\nabla\,\widehat{p}$$

1.5 Otras magnitudes acústicas

Impedancia acústica específica

Por analogía con los sistema eléctricos

$$\widehat{Z}_s = \frac{\widehat{p}}{\widehat{u}}$$

Esta cantidad indica como es la oposición que un sistema acústico presenta al movimiento de sus partículas cuando se le aplica una presión

Para ondas planas propagándose en la dirección positiva

$$\widehat{Z}_s = \frac{\widehat{p}}{\widehat{u}_x} = \rho_0 c$$

Para ondas esféricas propagándonse al infinito

$$\widehat{Z}_s = \frac{\widehat{p}}{\widehat{u}_r} = \rho_0 c \left(\frac{\jmath kr}{\jmath kr + 1} \right)$$

Obsérvese como si $kr >> 1$ las dos expresiones coinciden

Velocidad volumétrica U

Es la derivada respecto al tiempo del volumen que atraviesa una superficie

Para ondas planas en el interior de un tubo de sección S interesa considerar la superficie S

$$U = \frac{dV}{dt} = S\,\frac{dx}{dt} = S\,u_x$$

Si las ondas son armónicas planas

$$\widehat{U} = S\,\widehat{u}_x$$

Para ondas esféricas interesa considerar la superficie de una esfera

$$\widehat{U} = S_r\,\widehat{u}_r = 4\pi r^2\,\widehat{u}_r$$

Intensidad acústica

Es el flujo de potencia por unidad de área

$$\vec{I} = p\,\vec{u} \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$

Para ondas armónicas, se define la *intensidad acústica media* como

$$\vec{I}_{ef} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\widehat{p}\,\vec{\widehat{u}}^{\,*}\right] = \vec{n}\,\frac{1}{2}\,|\widehat{p}|^2\;\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\widehat{Z}_s^*}\right] = \vec{n}\,\frac{1}{2}\,|\widehat{u}|^2\;\mathrm{Re}\left[\widehat{Z}_s\right]$$

Para ondas armónicas planas y esféricas, se define la *intensidad acústica eficaz* como

$$I_{ef} = \left\|\vec{I}_{ef}\right\| = \frac{p_{ef}^2}{\rho_0 c}$$

El *nivel de intensidad sonora* es

$$NI = 10\log\left(I_{ef}/I_{ref}\right)$$

$I_{ref} = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$