

Tema 3

Radiación sonora

En este tema se estudian dos aspectos básicos de los emisores/radiadores de sonido

- Las *características direccionales* que explican la forma como la energía se distribuye por el medio de radiación
- Las *impedancias de radiación* que explican cómo el medio actúa contra la vibración de la superficie que produce el sonido

3.1 Descriptores de la directividad

Son parámetros que se usan para expresar las características direccionales de una fuente

Las características direccionales dependen de la frecuencia. La información de los descriptores de la directividad sólo se refieren a una frecuencia o intervalo de frecuencias

Directividad D

La directividad de una fuente sonora en una dirección, se define como la razón entre la presión eficaz generada por la fuente en esa dirección a la distancia r , y una presión eficaz de referencia $p_0(r)$; que suele ser la máxima que produce la fuente a esa distancia. En campo libre la directividad resulta independiente de la distancia

$$D(\theta, \phi) = \frac{p_{ef}(r, \theta, \phi)}{p_0(r)}$$

Cuando existe simetría de revolución en torno al eje z de la fuente sonora, no se considera la dependencia con ϕ

$$D(\theta) = \frac{p_{ef}(r, \theta)}{p_0(r)}$$

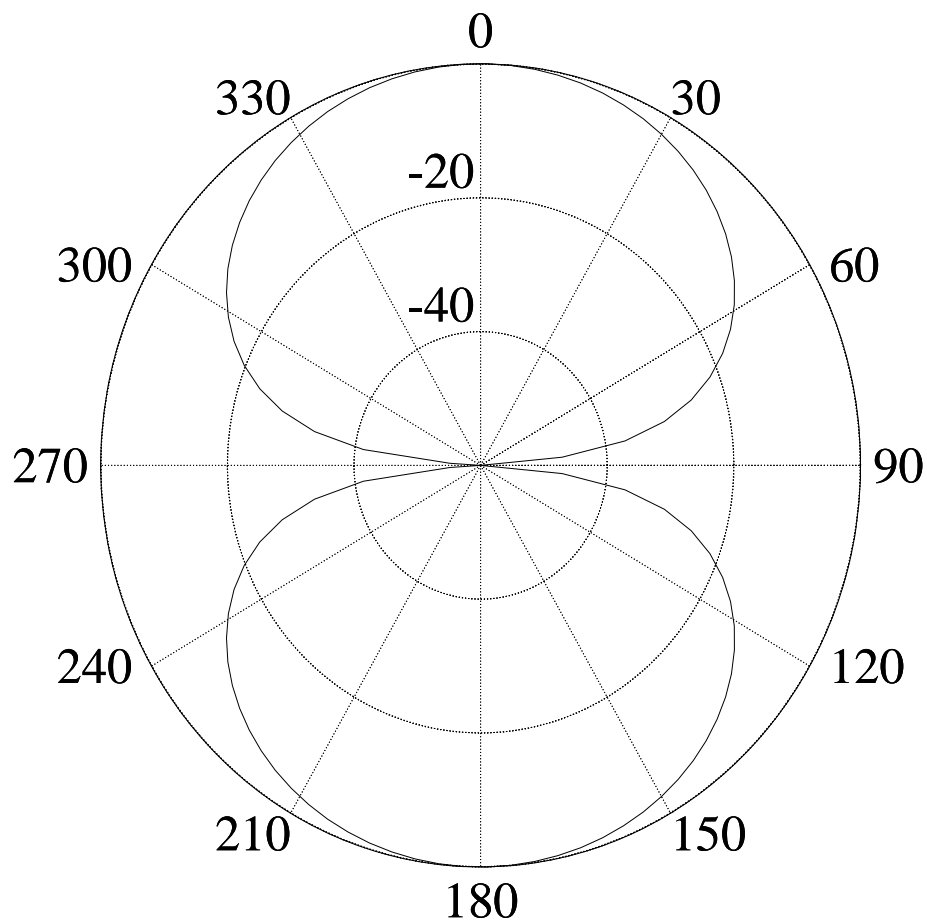
Es normal expresar la directividad en decibelios

$$D = 20 \log \frac{p_{ef}}{p_0}$$

Diagrama de directividad

Es la representación de la directividad de una fuente sonora en función de las coordenadas esféricas θ y ϕ

Cuando existe simetría de revolución en torno al eje z , la representación se puede realizar de manera sencilla y muy intuitiva en un diagrama polar 2D



Factor de directividad Q

El factor de directividad de una fuente en una dirección, se define como la razón entre la intensidad acústica que en esa dirección emite la fuente, y la intensidad que emitiría una fuente isotrópica -fuente puntual omnidireccional- que radiara igual potencia total

$$Q(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_{iso}}$$

$$I_{iso} = \frac{W}{4\pi r^2} = \frac{\int_S I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}{4\pi}$$

$$Q(\theta, \phi) = 4\pi \frac{I(\theta, \phi)}{\int_S I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}$$

Cuando existe simetría de revolución

$$Q(\theta) = \frac{1}{\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{I(\theta')}{I(\theta)} \sin \theta' d\theta'}$$

Índice de directividad DI

Se define como diez veces el logaritmo decimal del factor de directividad

$$DI = 10 \log Q$$

Se puede expresar como la suma del índice de directividad máximo más la directividad expresada en decibelios

$$\begin{aligned} DI &= 10 \log \frac{I}{I_{iso}} = 10 \log \frac{I_0}{I_{iso}} \frac{I}{I_0} = \\ &10 \log \frac{I_0}{I_{iso}} + 10 \log \frac{p^2}{p_0^2} = DI_0 + 20 \log D \end{aligned}$$

3.2 Directividad de fuentes

Fuente esférica

Sea una esfera de radio a situada en un medio homogéneo e isotrópico. Su superficie se mueve con una velocidad radial

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_a e^{j\omega t}$$

En el medio se generan ondas esféricas

$$\hat{p}(r) = \frac{\hat{A}}{r} e^{-jkr}$$

La fuente es omnidireccional; radia por igual en todas las direcciones

$$D = 1; \quad Q = 1; \quad DI = 0$$

Esta fuente sonora no existe, pero se puede utilizar para modelar fuentes sonoras que sean lo suficientemente pequeñas. Entonces la geometría de la fuente sonora pierde importancia

La presión en la superficie de la esfera es

$$\hat{p}(a) = \frac{\hat{A}}{a} e^{-j k a} =$$

$$\hat{Z}_s(a) \cdot \hat{u}_a = \rho_0 c \left(\frac{j k a}{j k a + 1} \right) \hat{u}_a$$

El valor de la amplitud resulta

$$\hat{A} = \rho_0 c \left(\frac{j k a^2}{j k a + 1} \right) \hat{u}_a e^{j k a} =$$

$$\frac{j \omega \rho_0}{4 \pi} \left(\frac{1}{1 + j k a} \right) \hat{U}_a e^{j k a}$$

Así

$$\hat{p}(r) = \frac{j \omega \rho_0}{4 \pi r} \left(\frac{1}{1 + j k a} \right) \hat{U}_a e^{-j k (r-a)}$$

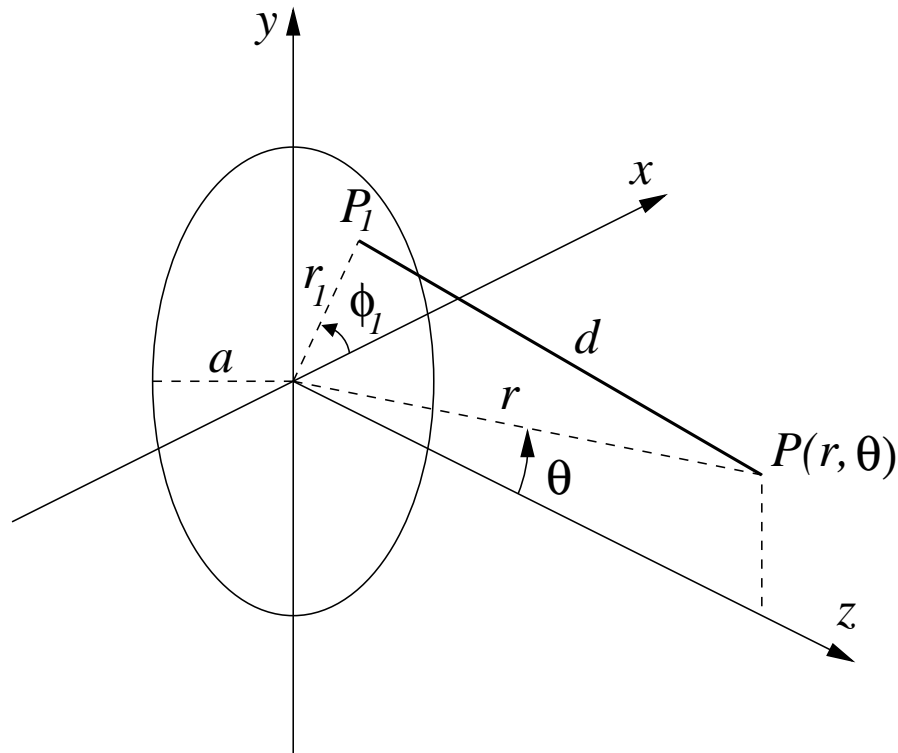
Cuando $k a \ll 1$ y $k r \gtrsim 1$

$$\hat{p}(r) = \frac{j \omega \rho_0}{4 \pi r} \hat{U}_a e^{-j k r}$$

Esta expresión no depende de la geometría de la fuente sonora

Pistón en pantalla infinita

Sea un pistón de radio a situado en una pantalla infinita, en un medio homogéneo e isotrópico



El elemento diferencial de superficie en P_1 genera en P la presión diferencial

$$d\hat{p} = \frac{j\omega\rho_0 d\hat{U}}{2\pi d} e^{-jk d} = \frac{j\omega\rho_0 \hat{u}}{2\pi d} e^{-jk d} dS$$

$d\hat{U} = \hat{u} dS$ es la velocidad volumétrica del elemento diferencial de superficie $dS = r_1 d\phi_1 dr_1$

En campo lejano $a \ll r$

$$\frac{1}{d} \approx \frac{1}{r}$$

$$e^{-jkd} \approx e^{-jkr} e^{jk r_1 \sin \theta \sin \phi_1}$$

La presión diferencial resulta entonces

$$d\hat{p} \approx \frac{j\omega\rho_0\hat{u}}{2\pi r} e^{-jkr} e^{jk r_1 \sin \theta \sin \phi_1} r_1 d\phi_1 dr_1$$

La presión total en P se obtiene sumando todas las contribuciones diferenciales

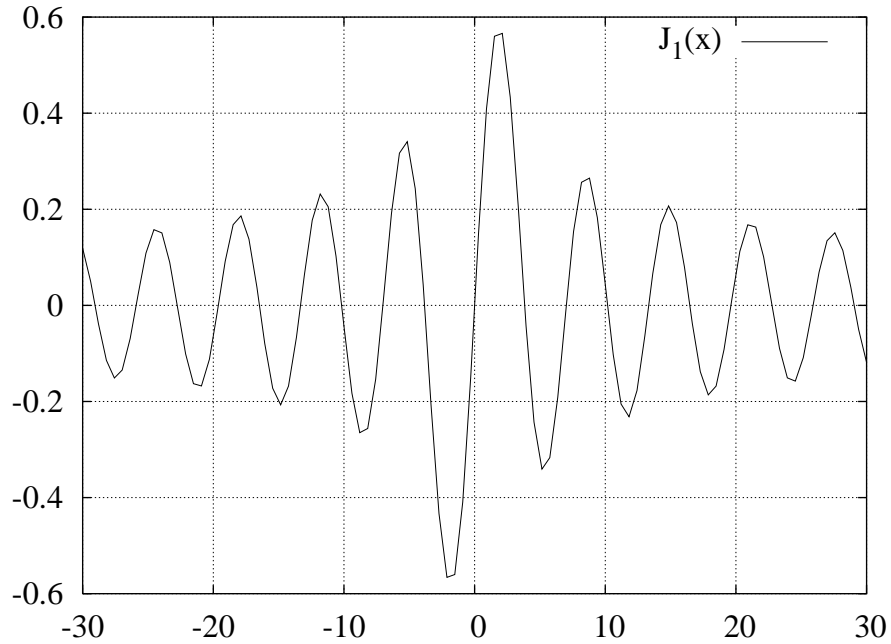
$$\hat{p}(r, \theta) = \int_S d\hat{p} =$$

$$\frac{j\omega\rho_0\hat{u}}{2\pi r} e^{-jkr} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{jk r_1 \sin \theta \sin \phi_1} r_1 d\phi_1 dr_1 =$$

$$\frac{j\omega\rho_0\hat{u}}{2\pi r} e^{-jkr} \int_0^a J_0(jk r_1 \sin \theta) r_1 dr_1 =$$

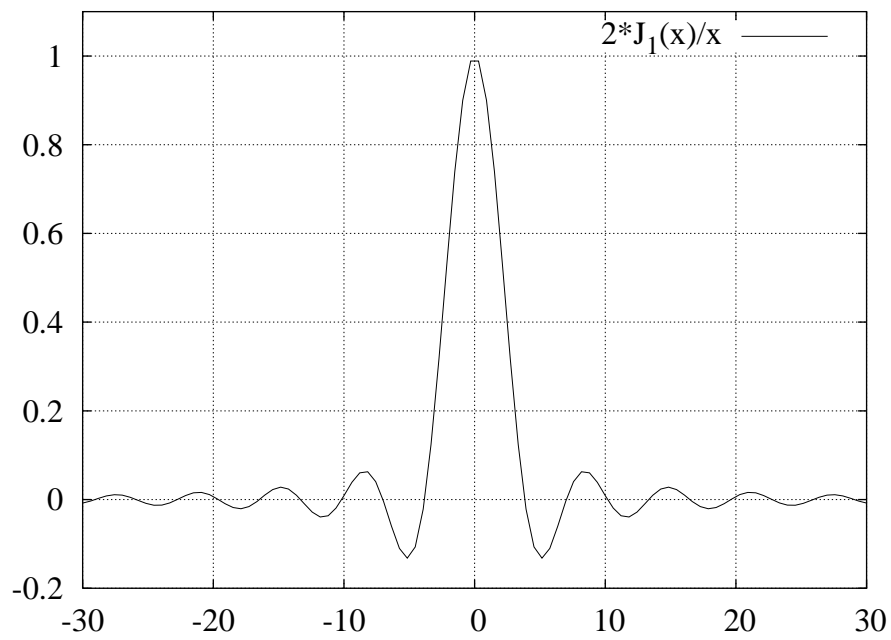
$$\frac{j\omega\rho_0\hat{U}}{2\pi r} \left[\frac{2 J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] e^{-jkr}$$

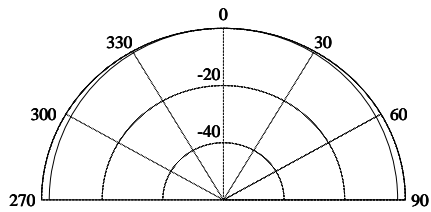
J_0 y J_1 son funciones de Bessel de primer orden y $\hat{U} = \pi a^2 \hat{u}$ es la velocidad volumétrica en la superficie del pistón



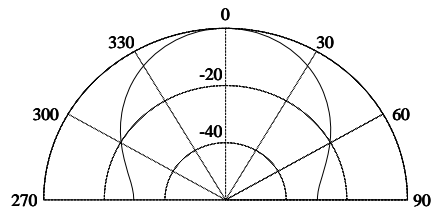
La directividad del pistón en pantalla infinita es

$$D = \left| \frac{\hat{p}(r, \theta)}{\hat{p}(r, 0)} \right| = \left| \frac{2 J_1 (ka \text{ sen } \theta)}{ka \text{ sen } \theta} \right|$$

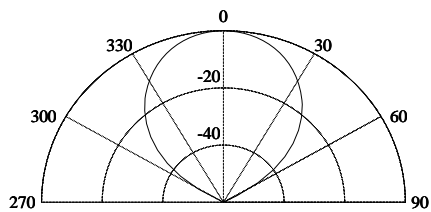




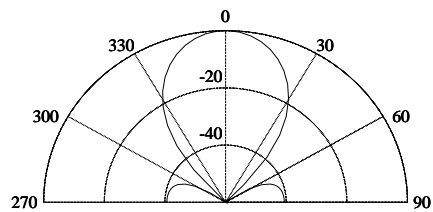
(a) $ka = 1$



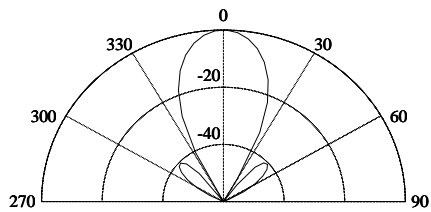
(b) $ka = 3$



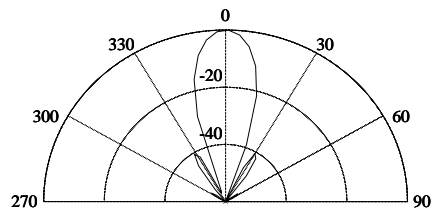
(c) $ka = 4$



(d) $ka = 5$



(e) $ka = 7$



(f) $ka = 10$

Directividad del pistón en pantalla infinita

La función de Bessel de primer orden y primera especie tiene el desarrollo en serie

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \dots$$

Cerca del eje z , con valores de $|ka \sin \theta|$ bajos

$$\hat{p}(r, \theta) \approx \frac{j\omega\rho_0 \hat{U}}{2\pi r} e^{-jkr}$$

3.3 Impedancias de radiación

El sonido se produce por una superficie vibrante como el diafragma de un altavoz

La impedancia de radiación es una medida cuantitativa de la oposición que presenta el medio al movimiento de la superficie vibrante

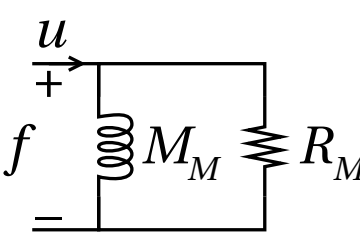
La impedancia de radiación tiene una parte real, que determina la potencia radiada, y una parte imaginaria o reactiva, que viene de la masa de aire que se mueve sin compresión apreciable

Esfera pulsante

La oposición a la vibración de la esfera es

$$\hat{Z}_M = \frac{\hat{f}}{\hat{u}} = \frac{S \cdot \hat{p}}{\hat{u}} = 4\pi a^2 \rho_0 c \frac{1}{1 + \frac{1}{jka}}$$

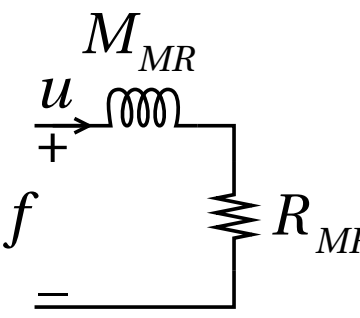
Esta impedancia de radiación puede expresarse como dos elementos en paralelo



$$\hat{Z}_M = \frac{1}{\frac{1}{4\pi a^2 \rho_0 c} + \frac{1}{j\omega 4\pi a^3 \rho_0}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R_M} + \frac{1}{j\omega M_M}}$$

Sin embargo, es más normal expresar esta impedancia como dos elementos en serie, aunque dependientes de la frecuencia



$$\hat{Z}_{MR} = 4\pi a^2 \rho_0 c \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}$$

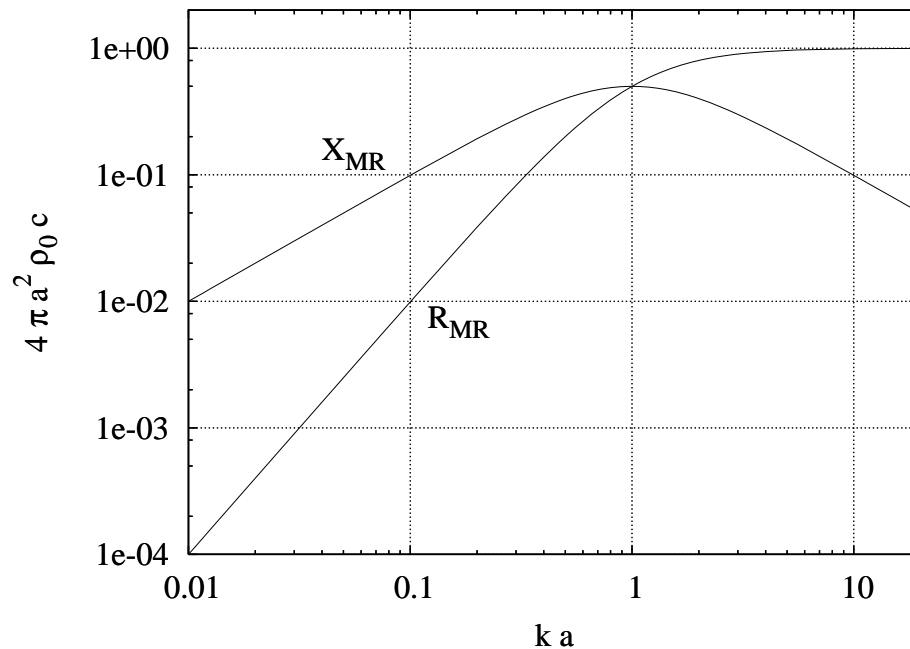
$$+ j4\pi a^2 \rho_0 c \frac{ka}{1 + (ka)^2}$$

$$= R_{MR} + jX_{MR}$$

R_{MR} y X_{MR} suelen representarse en su forma normalizada frente a ka

$$\overline{R_{MR}} = \frac{R_{MR}}{4\pi a^2 \rho_0 c} = \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}$$

$$\overline{X_{MR}} = \frac{X_{MR}}{4\pi a^2 \rho_0 c} = \frac{ka}{1 + (ka)^2}$$



A baja frecuencia, $ka \ll 1$

$$\overline{R_{MR}} \approx (ka)^2; \quad \overline{X_{MR}} \approx ka$$

A alta frecuencia, $ka \gg 1$

$$\overline{R_{MR}} \approx 1; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{1}{ka}$$

Pistón en pantalla infinita

La impedancia mecánica de radiación es

$$\widehat{Z}_{MR} = \pi a^2 \rho_0 c \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + j \frac{H_1(2ka)}{ka} \right]$$

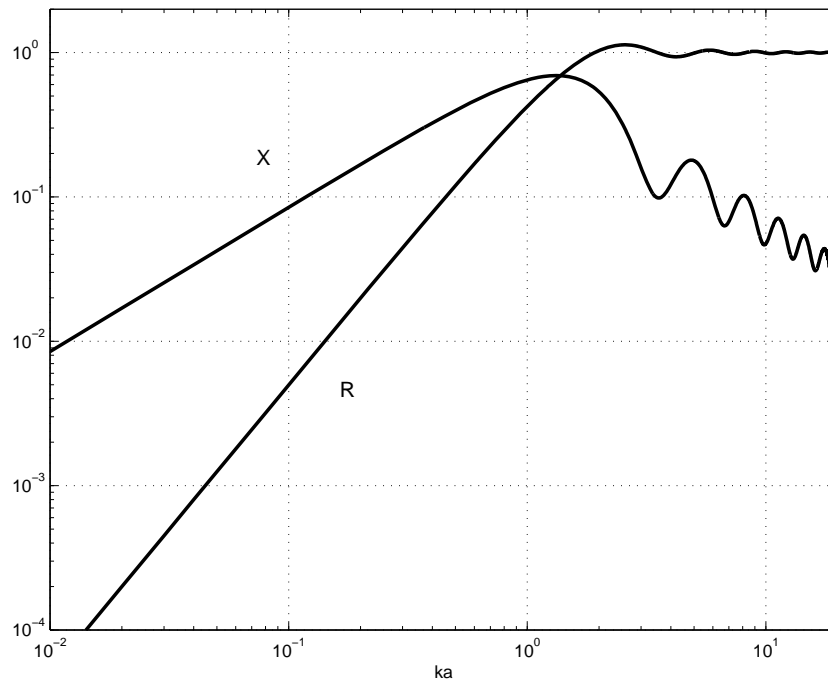
J_1 es la función de Bessel de primer orden y primera especie y H_1 es la función de Struve de primer orden

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right)$$

Los valores de R_{MR} y X_{MR} en su forma normalizada son

$$\overline{R}_{MR} = \frac{R_{MR}}{\pi a^2 \rho_0 c} = 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka}$$
$$\overline{X}_{MR} = \frac{X_{MR}}{\pi a^2 \rho_0 c} = \frac{H_1(2ka)}{ka}$$

La impedancia mecánica de radiación normalizada para el pistón en pantalla infinita posee el mismo aspecto que la de la esfera pulsante, con la diferencia de una cierta ondulación introducida por las funciones de Bessel y Struve



A baja frecuencia, $ka \ll 1$

$$\frac{J_1(2ka)}{ka} \approx 1 - \frac{(ka)^2}{2}; \quad \frac{H_1(2ka)}{ka} \approx \frac{8ka}{3\pi}$$

Entonces

$$\overline{R_{MR}} \approx \frac{(ka)^2}{2}; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{8ka}{3\pi}$$

A alta frecuencia, $ka \gg 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} H_1(x) = \frac{2}{\pi}$$

En consecuencia

$$\overline{R_{MR}} \approx 1; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{2}{\pi ka}$$

Pistón al final de un tubo

En el margen de baja frecuencia

$$\overline{R_{MR}} \approx \frac{(ka)^2}{4}; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{1,927ka}{\pi}$$

En el margen de alta frecuencia

$$\overline{R_{MR}} \approx 1; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{2}{\pi ka}$$

El factor de normalización es $\pi a^2 \rho_0 c$

Pistón radiando libremente

En el margen de baja frecuencia

$$\overline{R_{MR}} \approx (\omega a)^2 \frac{(ka)^2 \rho_0}{20}; \quad \overline{X_{MR}} \approx \frac{8ka}{3\pi}$$

En el margen de alta frecuencia

$$\overline{R_{MR}} \approx 2; \quad \overline{X_{MR}} \approx 0$$

El factor de normalización es $\pi a^2 \rho_0 c$

x	$\frac{2J_1(x)}{x}$	D_{dB}	x	$\frac{2J_1(x)}{x}$	D_{dB}	x	$\frac{2J_1(x)}{x}$	D_{dB}
0,0	1,000	0,00	4,0	-0,033	-29,63	8,0	0,059	-24,30
0,1	0,999	-0,01	4,1	-0,050	-25,95	8,1	0,061	-24,20
0,2	0,995	-0,04	4,2	-0,066	-23,61	8,2	0,063	-24,10
0,3	0,989	-0,10	4,3	-0,080	-21,94	8,3	0,064	-23,99
0,4	0,980	-0,17	4,4	-0,092	-20,71	8,4	0,065	-23,89
0,5	0,969	-0,27	4,5	-0,103	-19,77	8,5	0,064	-23,78
0,6	0,956	-0,39	4,6	-0,112	-19,05	8,6	0,063	-23,68
0,7	0,940	-0,54	4,7	-0,119	-18,50	8,7	0,062	-23,57
0,8	0,922	-0,70	4,8	-0,124	-18,10	8,8	0,060	-23,47
0,9	0,902	-0,89	4,9	-0,128	-17,83	8,9	0,058	-23,36
1,0	0,880	-1,11	5,0	-0,131	-17,65	9,0	0,055	-23,26
1,1	0,856	-1,35	5,1	-0,132	-17,58	9,1	0,051	-23,15
1,2	0,831	-1,61	5,2	-0,132	-17,59	9,2	0,047	-23,05
1,3	0,803	-1,90	5,3	-0,131	-17,68	9,3	0,043	-22,94
1,4	0,774	-2,22	5,4	-0,128	-17,86	9,4	0,039	-22,84
1,5	0,744	-2,57	5,5	-0,124	-18,12	9,5	0,034	-22,73
1,6	0,712	-2,95	5,6	-0,119	-18,46	9,6	0,029	-22,63
1,7	0,680	-3,35	5,7	-0,114	-18,88	9,7	0,024	-22,52
1,8	0,646	-3,79	5,8	-0,107	-19,39	9,8	0,019	-22,42
1,9	0,612	-4,27	5,9	-0,100	-20,00	9,9	0,014	-22,31
2,0	0,577	-4,78	6,0	-0,092	-20,71	10,0	0,009	-22,21
2,1	0,541	-5,33	6,1	-0,084	-21,52	10,1	0,004	-22,10
2,2	0,505	-5,93	6,2	-0,075	-22,49	10,2	-0,001	-22,00
2,3	0,470	-6,57	6,3	-0,066	-23,60	10,3	-0,006	-21,89
2,4	0,434	-7,26	6,4	-0,057	-24,91	10,4	-0,011	-21,79
2,5	0,398	-8,01	6,5	-0,047	-26,50	10,5	-0,015	-21,68
2,6	0,362	-8,82	6,6	-0,038	-28,43	10,6	-0,019	-21,58
2,7	0,327	-9,71	6,7	-0,029	-30,90	10,7	-0,023	-21,47
2,8	0,293	-10,67	6,8	-0,019	-34,33	10,8	-0,026	-21,37
2,9	0,259	-11,74	6,9	-0,010	-39,91	10,9	-0,029	-21,26

Directividad de un pistón
montado en pantalla in-
finita

$2ka$	$\overline{R_{MR}}$	$\overline{X_{MR}}$	$2ka$	$\overline{R_{MR}}$	$\overline{X_{MR}}$	$2ka$	$\overline{R_{MR}}$	$\overline{X_{MR}}$
0,0	0,0000	0,0000	4,0	1,0330	0,5349	8,0	0,9413	0,9413
0,1	0,0012	0,0424	4,1	1,0504	0,5146	8,1	0,9389	0,9389
0,2	0,0050	0,0847	4,2	1,0660	0,4937	8,2	0,9371	0,9371
0,3	0,0112	0,1266	4,3	1,0800	0,4725	8,3	0,9360	0,9360
0,4	0,0199	0,1680	4,4	1,0922	0,4510	8,4	0,9355	0,9355
0,5	0,0309	0,2087	4,5	1,1027	0,4293	8,5	0,9357	0,9357
0,6	0,0443	0,2486	4,6	1,1115	0,4077	8,6	0,9366	0,9366
0,7	0,0600	0,2875	4,7	1,1188	0,3861	8,7	0,9380	0,9380
0,8	0,0779	0,3253	4,8	1,1244	0,3647	8,8	0,9400	0,9400
0,9	0,0979	0,3618	4,9	1,1284	0,3437	8,9	0,9425	0,9425
1,0	0,1199	0,3969	5,0	1,1310	0,3231	9,0	0,9455	0,9455
1,1	0,1438	0,4305	5,1	1,1322	0,3031	9,1	0,9489	0,9489
1,2	0,1695	0,4624	5,2	1,1320	0,2837	9,2	0,9527	0,9527
1,3	0,1969	0,4925	5,3	1,1306	0,2649	9,3	0,9569	0,9569
1,4	0,2258	0,5208	5,4	1,1279	0,2470	9,4	0,9614	0,9614
1,5	0,2561	0,5471	5,5	1,1242	0,2300	9,5	0,9660	0,9660
1,6	0,2876	0,5713	5,6	1,1194	0,2138	9,6	0,9709	0,9709
1,7	0,3203	0,5935	5,7	1,1137	0,1986	9,7	0,9760	0,9760
1,8	0,3539	0,6134	5,8	1,1073	0,1845	9,8	0,9811	0,9811
1,9	0,3883	0,6312	5,9	1,1000	0,1714	9,9	0,9862	0,9862
2,0	0,4233	0,6468	6,0	1,0922	0,1594	10,0	0,9913	0,9913
2,1	0,4588	0,6600	6,1	1,0839	0,1485	10,1	0,9964	0,9964
2,2	0,4946	0,6710	6,2	1,0751	0,1387	10,2	1,0013	1,0013
2,3	0,5305	0,6798	6,3	1,0661	0,1300	10,3	1,0061	1,0061
2,4	0,5665	0,6863	6,4	1,0568	0,1224	10,4	1,0107	1,0107
2,5	0,6023	0,6905	6,5	1,0473	0,1159	10,5	1,0150	1,0150
2,6	0,6378	0,6926	6,6	1,0379	0,1105	10,6	1,0191	1,0191
2,7	0,6729	0,6925	6,7	1,0285	0,1061	10,7	1,0229	1,0229
2,8	0,7074	0,6904	6,8	1,0192	0,1028	10,8	1,0263	1,0263
2,9	0,7411	0,6862	6,9	1,0101	0,1004	10,9	1,0294	1,0294

Impedancia mecánica de radiación normalizada de un pistón en pantalla infinita