Tema 2

Analogías EMA

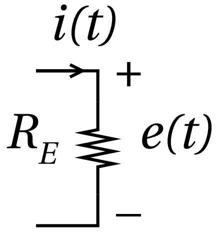
Los sistemas eléctricos, mecánicos y acústicos poseen ecuaciones diferenciales análogas

Para representar y analizar sistemas mecánicos y acústicos, que presentan cierta complejidad, es posible utilizar los elementos eléctricos y la teoría de circuitos, de los que se tiene mayor conocimiento y soltura

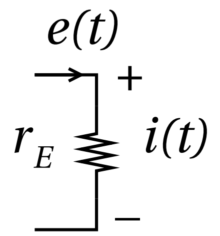
2.1 Circuito *dual*

Para todo circuito eléctrico existe otro circuito, su *circuito dual*, en el que, sin tener en cuenta las unidades, las corrientes de este *circuito dual* son las tensiones del circuito original y viceversa

Resistencia eléctrica

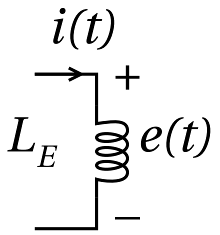


$$e\,(t) = R_E\, i\,(t)$$

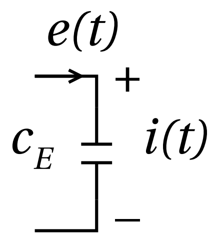


$$i\,(t) = r_E\, e\,(t)\,; \quad r_E = \frac{1}{R_E}$$

Autoinducción eléctrica

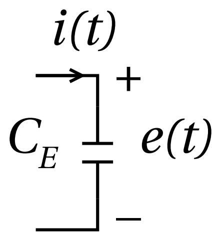


$$e\,(t) = L_E\,\frac{d\,i\,(t)}{dt}$$

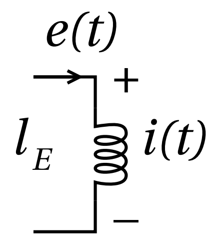


$$i\,(t) = \frac{1}{c_E}\int e\,(t)\ dt; \quad c_E = L_E$$

Capacidad eléctrica

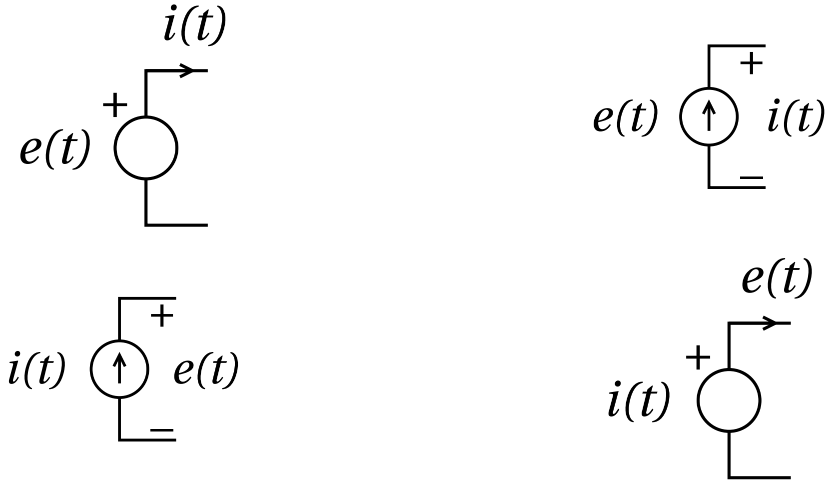


$$e\,(t) = \frac{1}{C_E}\int i\,(t)\ dt$$

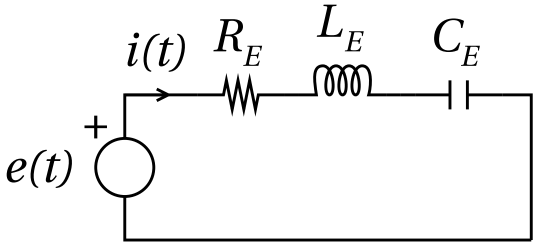


$$i\,(t) = l_E\,\frac{d\,e\,(t)}{dt}; \quad l_E = C_E$$

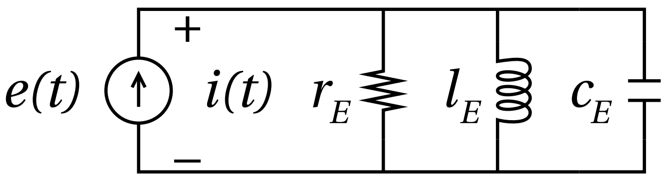
Generadores eléctricos



Ejemplo



$$e\,(t) = R_E\, i\,(t) + L_E\, \frac{d\, i\,(t)}{dt} + \frac{1}{C_E} \int i\,(t)\; dt$$



$$e\,(t) = \frac{i\,(t)}{r_E} + c_E\, \frac{d\, i\,(t)}{dt} + \frac{1}{l_E} \int i\,(t)\; dt$$

$$r_E = \frac{1}{R_E}; \quad c_E = L_E; \quad l_E = C_E$$

2.2 Analogías

A bajas frecuencias, $\lambda \gg L$, cualquier sistema mecánico–acústico se puede representar mediante un circuito equivalente (y también mediante el circuito dual de éste)

Analogía de impedancia: las tensiones son las fuerzas/presiones del sistema mecánico/acústico; las corrientes las velocidades/velocidades volumétricas

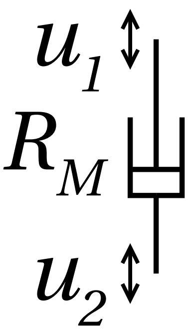
Analogía de movilidad: las tensiones son las velocidades/velocidades volumétricas del sistema mecánico/acústico; y las corrientes las fuerzas/-presiones

Analogía	C. E.	S. Mec.	S. Ac.
Impedancia	$e\,(t)$	$f\,(t)$	$p\,(t)$
	$i\,(t)$	$u\,(t)$	$U\,(t)$
Movilidad	$e\,(t)$	$u\,(t)$	$U\,(t)$
	$i\,(t)$	$f\,(t)$	$p\,(t)$

2.3 Circuitos mecánicos

Resistencia mecánica R_M

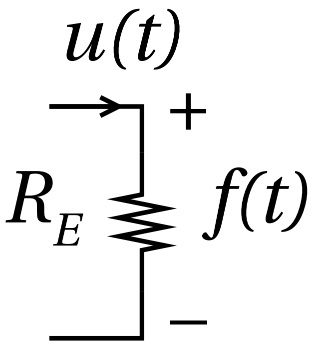
Representa las pérdidas por fricción cuando un elemento roza con otro



Ley de rozamiento

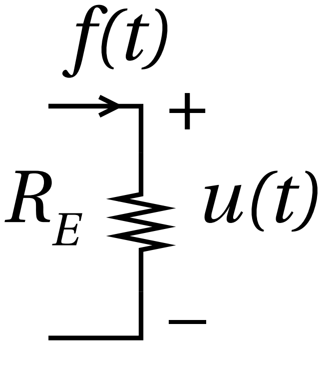
$$f(t) = R_M \, u(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{R_M} f(t)$$



$$f(t) = R_E \, u(t)$$

$$R_E = R_M$$

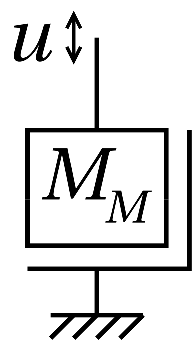


$$u(t) = R_E \, f(t)$$

$$R_E = r_M = \frac{1}{R_M}$$

Masa mecánica M_M

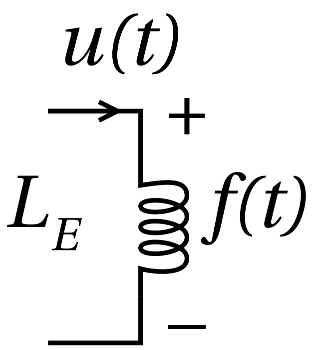
Representa la capacidad de la materia para almacenar energía en forma de inercia cuando se le aplica una fuerza



2ª ley de Newton

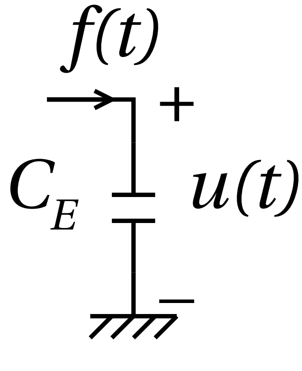
$$f\,(t) = M_M\,\frac{d\,u\,(t)}{dt}$$

$$u\,(t) = \frac{1}{M_M}\int f\,(t)\;dt$$



$$f\,(t) = L_E\,\frac{d\,u\,(t)}{dt}$$

$$L_E = M_M$$

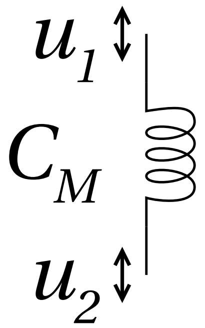


$$u\,(t) = \frac{1}{C_E}\int f\,(t)\;dt$$

$$C_E = M_M$$

Compliancia mecánica C_M

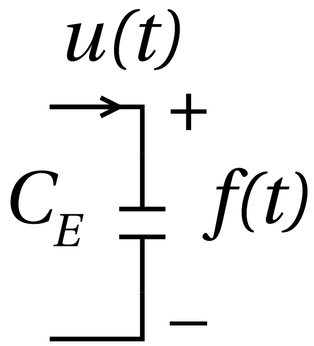
Representa la capacidad de una suspensión para almacenar energía elástica cuando se le aplica una fuerza



Ley de Hooke

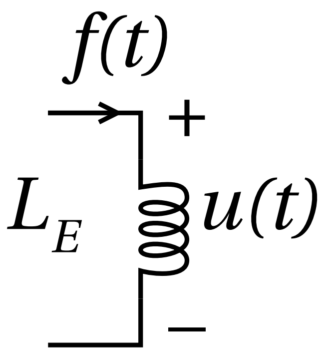
$$f\,(t) = \frac{1}{C_M} \int u\,(t)\;dt$$

$$u\,(t) = C_M\,\frac{d\,f\,(t)}{dt}$$



$$f\,(t) = \frac{1}{C_E} \int u\,(t)\;dt$$

$$C_E = C_M$$

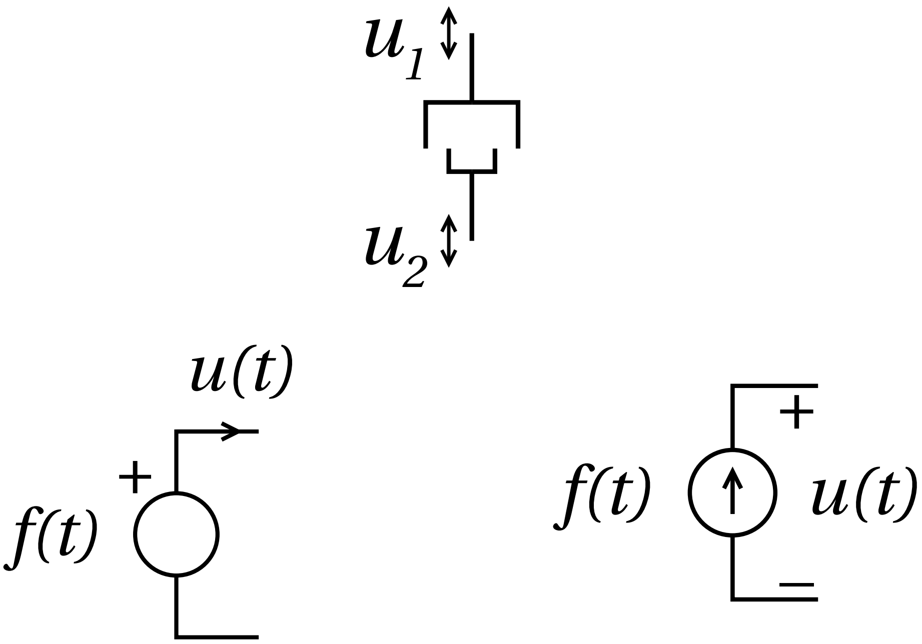


$$u\,(t) = L_E\,\frac{d\,f\,(t)}{dt}$$

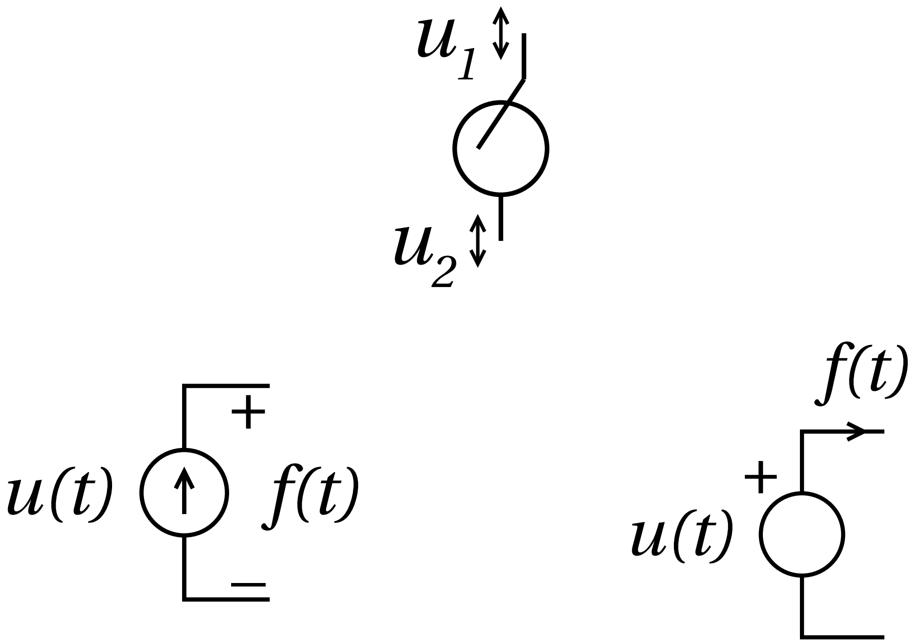
$$L_E = C_M$$

Generadores mecánicos

Generador de fuerza



Generador de movimiento



Impedancia mecánica $\widehat{Z}_M$

Es la relación compleja entre la fuerza y la velocidad en un punto dado de un sistema mecánico

$$\widehat{Z}_M = \frac{\widehat{f}}{\widehat{u}} \quad [\Omega_{mec} \text{ ó N s/m}]$$

Movilidad mecánica $\widehat{z}_M$

Es la inversa de la impedancia mecánica

$$\widehat{z}_M = \widehat{Z}_M^{-1} \quad [\mho_{mec} \text{ ó m/N s}]$$

donde $\mho_{mec}$ es *mohm mecánico*

Obtención del circuito equivalente en la analogía de movilidad

1. Asignar una velocidad única (u_i) a cada masa y a cada unión entre resistencias y compliancias, si estas no incluyen una masa

2. Asignar a cada velocidad un nudo

$$u_1 \bullet \quad u_2 \bullet \quad u_3 \bullet \quad \ldots \quad u_n \bullet$$

3. Dibujar una línea en la base del esquema que representa la tierra

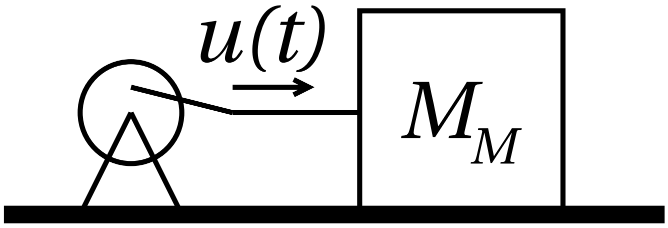
4. Conectar cada masa, representada como condensador, entre el nudo de su velocidad correspondiente y tierra

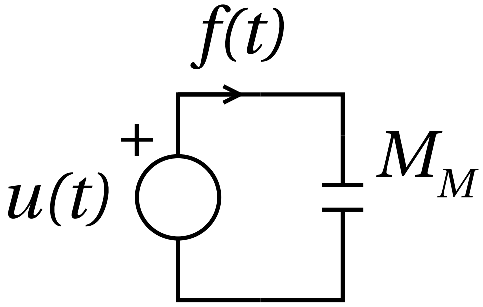
5. El resto de elementos se conectan entre los nudos, si ambos extremos del elemento se mueven; o entre un nudo y tierra, si uno de sus extremos se mueve pero el otro está fijo

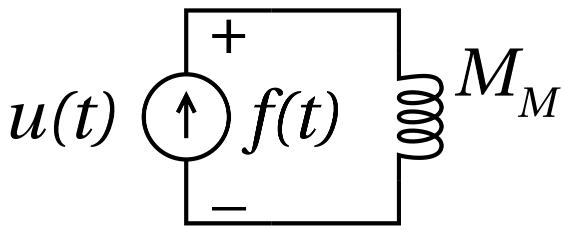
Obtención del circuito equivalente en la analogía de impedancia

1. Asignar un velocidad única (u_i) a cada masa y a cada unión entre resistencias y compliancias, si estas no incluyen una masa
2. Determinar la velocidad de cada resistencia y de cada compliancia como la diferencia de velocidades entre sus extremos ($u_i - u_j$)
3. Por cada velocidad u_i tendremos una malla en nuestro circuito equivalente, por la que circulará esa velocidad
4. Los elementos comunes a dos mallas son las resistencias y/o compliancias cuyas velocidades $u_i - u_j$ se corresponden con la diferencia de velocidad entre las dos mallas
5. Las resistencias y/o compliancias en las que sólo se mueve uno de sus extremos, pertenecen sólo a la malla de su misma velocidad
6. Si la velocidad de una malla es la velocidad de una masa, esta masa se incluye en la malla, representada por una bobina

Ejemplo 1







Considerando que los valores de masa y de velocidad en este sistema son

$$
\begin{aligned}
M_M &= 100 \text{ g} \\
u\,(t) &= 15 \cos\left(2\pi\, 100\text{t}\right) \text{ cm/s}
\end{aligned}
$$

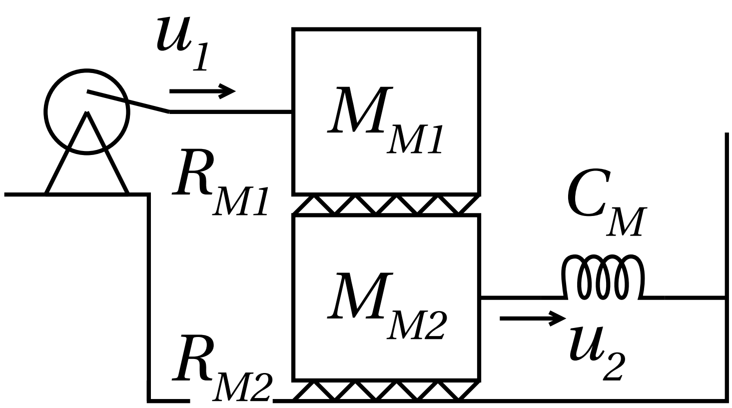
La amplitud compleja de la fuerza resulta

$$\widehat{f} = \jmath\omega\, M_M\, \widehat{u} = \jmath\, 2\pi\, 100 \cdot 0,1 \cdot 0,15 = 9,4\jmath \text{ N}$$

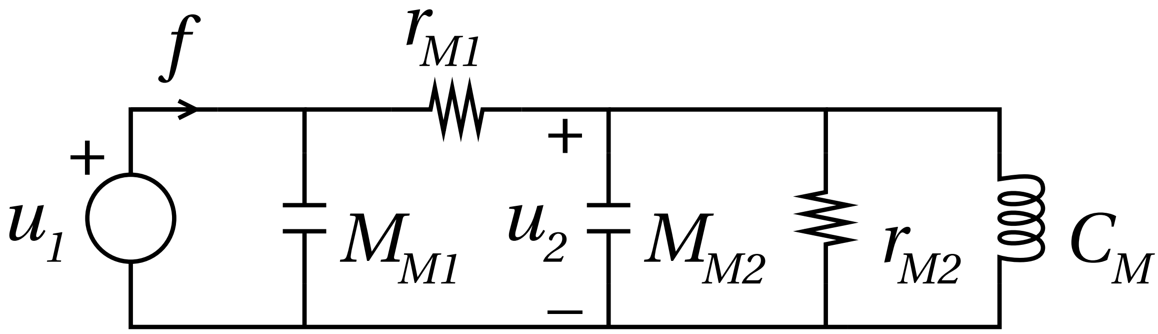
La fuerza que actúa es etonces

$$f\,(t) = \Re\left[\widehat{f}\, e^{\jmath\omega\, t}\right] = -9,4 \,\text{sen}\left(2\pi\, 100\text{t}\right) \text{ N}$$

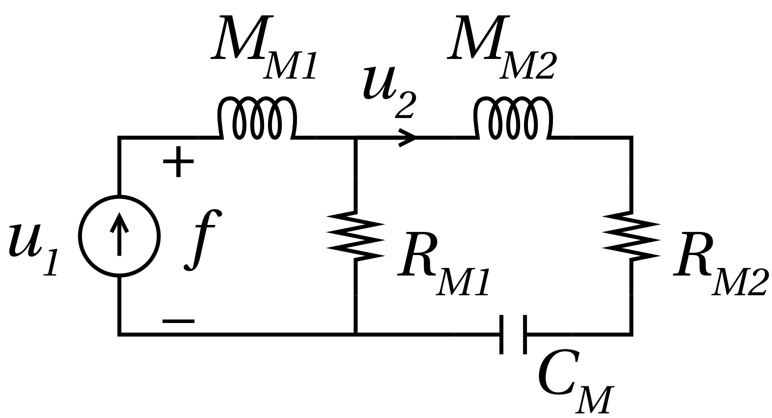
Ejemplo 2



u_1
M_{M1}
R_{M1}
C_M
M_{M2}
u_2
R_{M2}



f
r_{M1}
+
u_1
M_{M1}
u_2
M_{M2}
r_{M2}
C_M
−

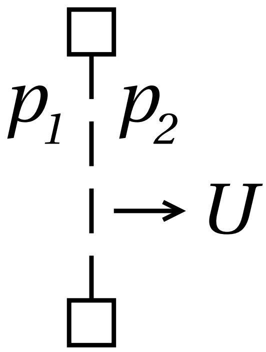


M_{M1}
u_2
M_{M2}
+
u_1
f
R_{M1}
R_{M2}
−
C_M

2.4 Circuitos acústicos

Resistencia acústica R_A

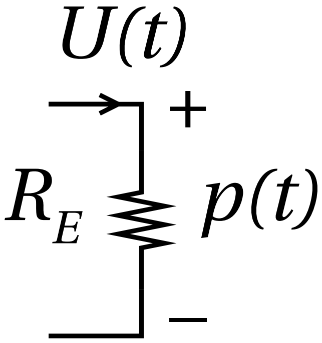
Representa, típicamente, las pérdidas disipativas que ocurren cuando hay movimiento viscoso de una cantidad de aire a través de un malla o material poroso



Ley de rozamiento viscoso

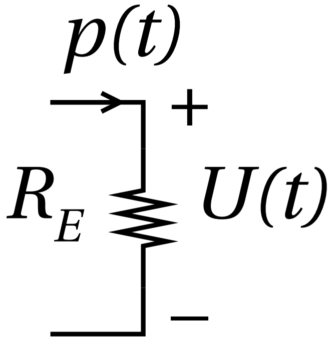
$$p\,(t) = R_A\, U\,(t)$$

$$U\,(t) = \frac{1}{R_A}\, p\,(t)$$



$$p\,(t) = R_E\, U\,(t)$$

$$R_E = R_A$$



$$U\,(t) = R_E\, p\,(t)$$

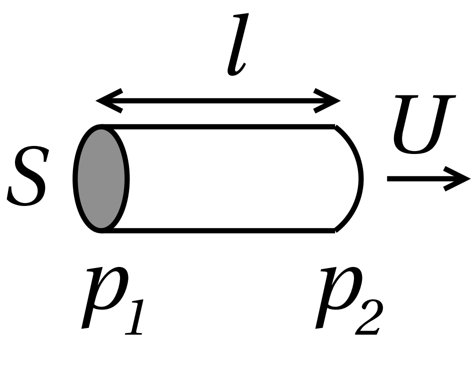
$$R_E = r_A = \frac{1}{R_A}$$

Masa acústica M_A

Representa la capacidad de un fluido para almacenar energía de inercia

Es un cantidad proporcional a la masa mecánica de la cantidad de aire que, acelerada por una fuerza, se desplaza sin comprimirse de manera apreciable

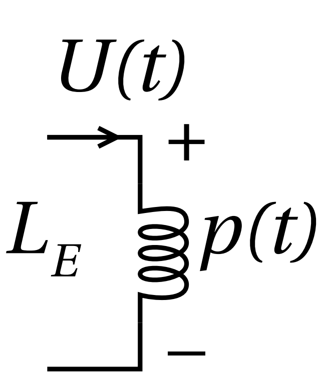
Su símbolo típico es un tubo abierto por sus extremos, donde el aire contenido en su interior se mueve libremente sin apenas compresión



2ª ley de Newton

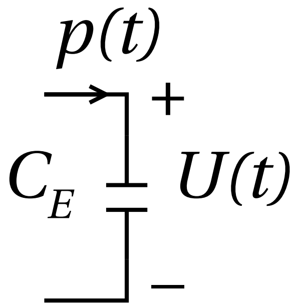
$$p\,(t) = M_A \,\frac{d\,U\,(t)}{dt}$$

$$U\,(t) = \frac{1}{M_A}\int p\,(t)\;dt$$



$$p\,(t) = L_E \,\frac{d\,U\,(t)}{dt}$$

$$L_E = M_A$$



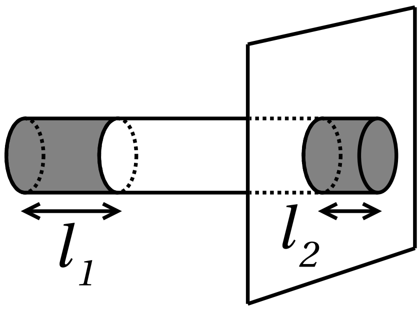
$$U\left(t\right)=\frac{1}{C_E}\int p\left(t\right)\,dt$$

$$C_E=M_A$$

La masa acústica en un tubo ($k\,l<<1$) es

$$M_A=\frac{M_M}{S^2}=\frac{\rho_0\,l\,S}{S^2}=\rho_0\,\frac{l}{S}$$

Pero existe un volumen fuera que se mueve con el aire contenido en el tubo



Es necesario tener en cuenta estos volúmenes

$$M_A^{ef}=\rho_0\,\frac{l}{S}+\rho_0\,\frac{l_1}{S}+\rho_0\,\frac{l_2}{S}=\frac{\rho_0}{S}\,l_{ef}$$

En este ejemplo las correcciones son

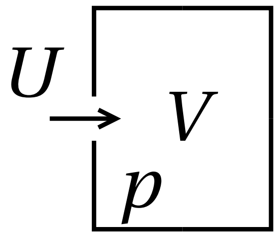
$$l_1=0,1952\,\pi a;\qquad l_2=\frac{8}{3\pi}\,a$$

donde $a=\sqrt{S/\pi}$

Compliancia acústica C_A

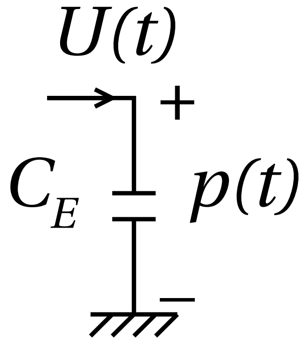
Representa la elasticidad de un fluido

Ley de Hooke



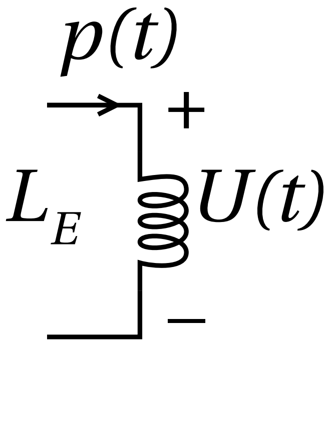
$$p\,(t) = \frac{1}{C_A} \int U\,(t)\; dt$$

$$U\,(t) = C_A\, \frac{d\,p\,(t)}{dt}$$



$$p\,(t) = \frac{1}{C_E} \int U\,(t)\; dt$$

$$C_E = C_A$$



$$U\,(t) = L_E\, \frac{d\,p\,(t)}{dt}$$

$$L_E = C_A$$

A bajas frecuencias, en un volumen arbitrario

$$C_A = \frac{V}{\gamma\, P_0} = \frac{V}{\rho_0\, c^2}$$

Impedancia acústica $\widehat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{A}}$

Se define como la razón compleja

$$\widehat{Z}_A = \frac{\widehat{p}}{\widehat{U}} = \frac{\widehat{F}/S}{\widehat{v}\cdot S} = \frac{\widehat{Z}_M}{S^2} \qquad \left[\Omega_A \text{ ó N s/m}^5\right]$$

Su inversa es la movilidad acústica

$$\widehat{z}_A = \widehat{Z}_A^{-1} \qquad \left[\text{m}^5/\text{N s}\right]$$

La relación entre $\widehat{Z}_A$ y $\widehat{Z}_M$ es S^2

$$R_A = \frac{R_M}{S^2}; \quad M_A = \frac{M_M}{S^2}; \quad \frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_M\, S^2}$$

Condiciones de continuidad

En la unión de n elementos acústicos

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n$$

En la unión de n resistencias y masas acústicas

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = 0$$

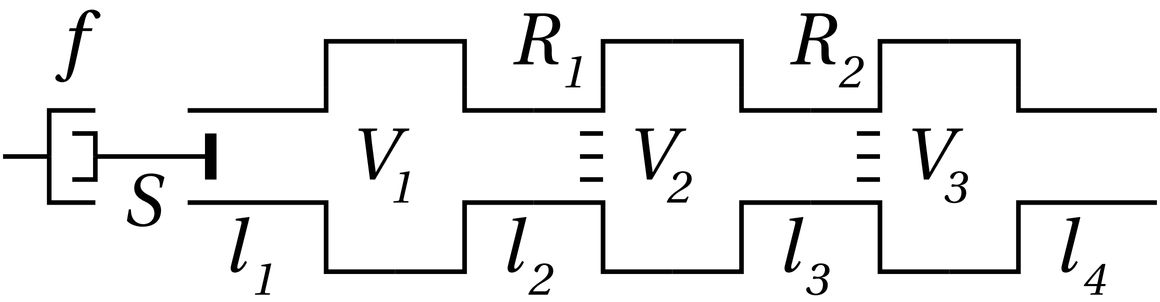
Obtención del circuito equivalente en la analogía de impedancia

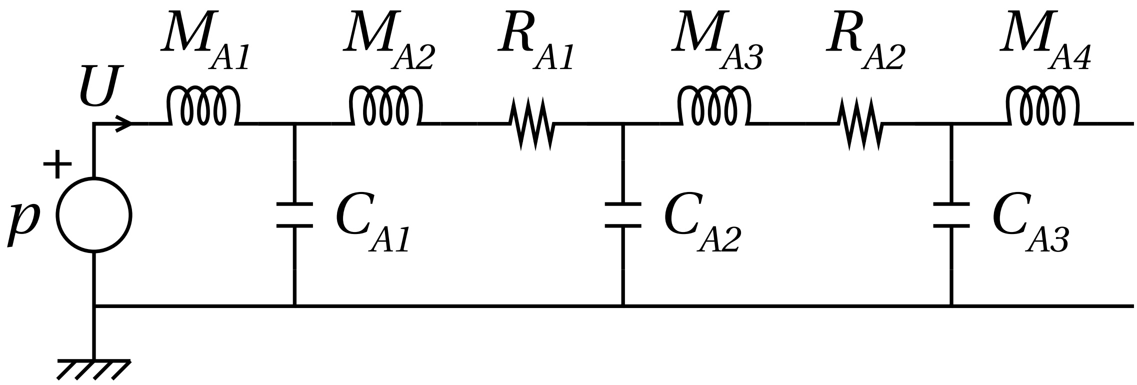
1. Asignar una presión única (p_i) a cada compliancia y a cada unión entre resistencias y masas acústicas, si estas no incluyen una compliancia
2. Asignar a cada presión un nudo
3. Dibujar una línea en la base del esquema que represente la tierra
4. Conectar cada compliancia, representada como condensador, entre el nudo de su presión correspondiente y tierra
5. El resto de elementos se conectan entre los nudos, si ambos extremos del elemento se encuentran a presiones diferentes de cero; o entre un nudo y tierra, si uno de los extremos se encuentra a presión cero

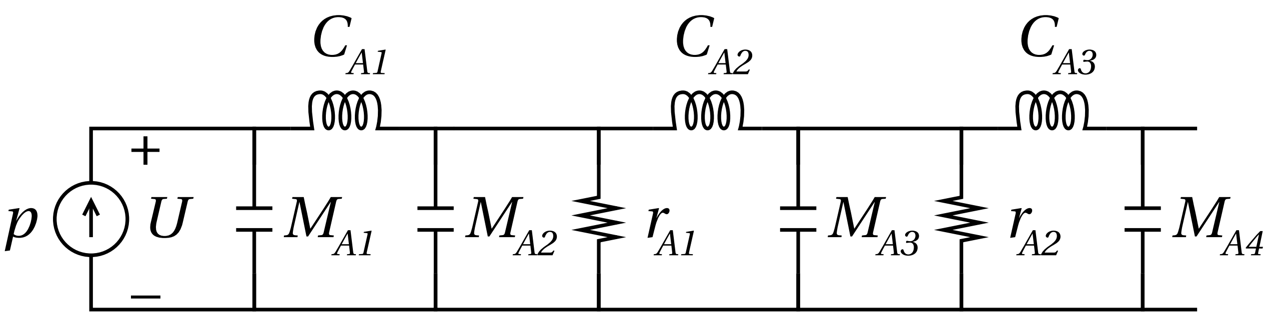
Obtención del circuito equivalente en la analogía de movilidad

1. Asignar un presión única (p_i) a cada compliancia; y a cada unión entre resistencias y masas acústicas sin compliancia
2. Determinar la presión de cada resistencia y de cada masa acústica como la diferencia de presiones entre sus extremos ($p_i - p_j$)
3. Por cada presión p_i dibujar una malla del circuito equivalente, por la que circulará esa presión
4. Los elementos comunes a dos mallas son las resistencias y/o masas acústicas cuyas presiones $p_i - p_j$ se corresponden con la diferencia de presión entre las dos mallas
5. Las resistencias y/o masas acústicas en que uno de sus extremos se encuentra a presión acústica cero, pertenecen a una sola malla
6. Si la presión de una malla es la presión de una compliancia, esta compliancia se incluye en la malla, representada por una bobina

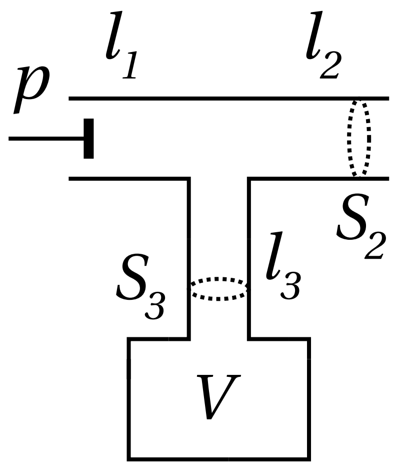
Ejemplo 1

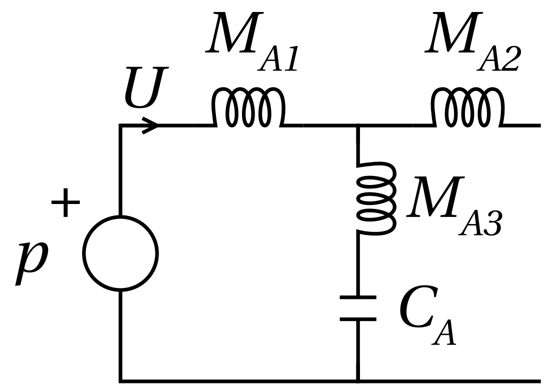

f
S
R_1
R_2
V_1
V_2
V_3
l_1
l_2
l_3
l_4

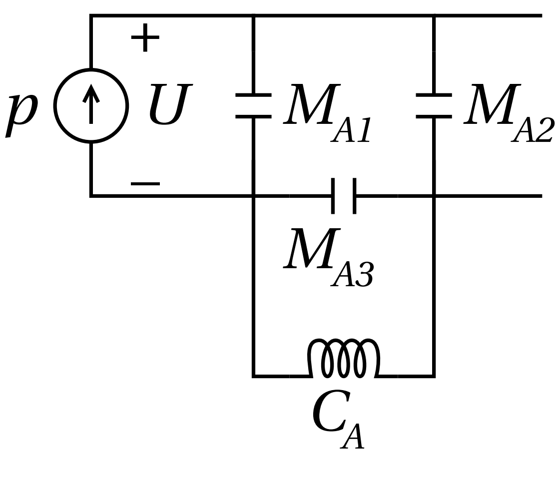

M_{A1}
M_{A2}
R_{A1}
M_{A3}
R_{A2}
M_{A4}
U
+
p
C_{A1}
C_{A2}
C_{A3}


C_{A1}
C_{A2}
C_{A3}
+
p
U
−
M_{A1}
M_{A2}
r_{A1}
M_{A3}
r_{A2}
M_{A4}

Ejemplo 2





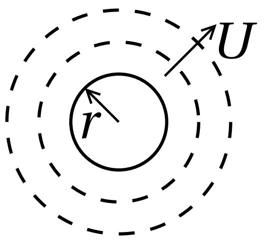


2.5 Elementos mecánicos y acústicos

En la mayoría de los casos, los dispositivos reales pueden modelarse a partir de elementos geométricos sencillos como la esfera, el tubo o el pistón

Esfera pulsante

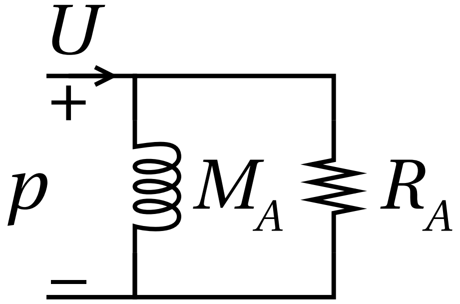
Sea una esfera de radio r que genera ondas esféricas mediante un movimiento radial. La impedancia acústica en la superficie de la esfera es



$$\widehat{Z}_A = \frac{\widehat{p}}{\widehat{U}} = \frac{\widehat{p}}{\widehat{u} \cdot S} =$$

$$\frac{\widehat{Z}_s}{4\pi\, r^2} = \frac{1}{\frac{4\pi\, r^2}{\rho_0 c} + \frac{4\pi\, r}{\jmath\, \omega\, \rho_0}}$$

Esta impedancia corresponde a dos elementos en paralelo, uno resistivo y otro inductivo



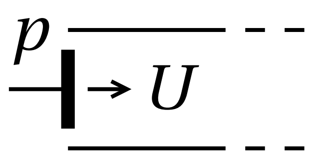
$$R_A = \frac{\rho_0 c}{4\pi\, r^2}$$

$$M_A = \frac{\rho_0}{4\pi\, r}$$

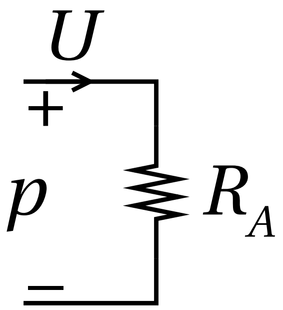
Tubo de onda plana

Sea un tubo de sección S en el que se generan ondas planas desde uno de sus extremos

Si el tubo es de longitud infinita

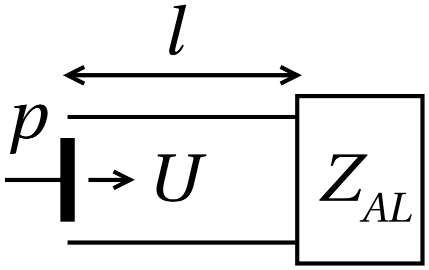


$$\widehat{Z}_A = \frac{\widehat{Z}_s}{S} = \frac{\rho_0 c}{\pi\, r^2}$$



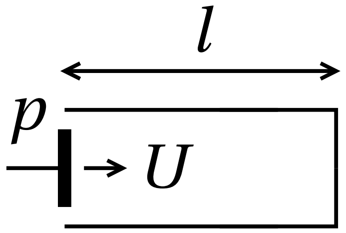
$$R_A = \frac{\rho_0 c}{\pi\, r^2}$$

Si el tubo es de longitud l

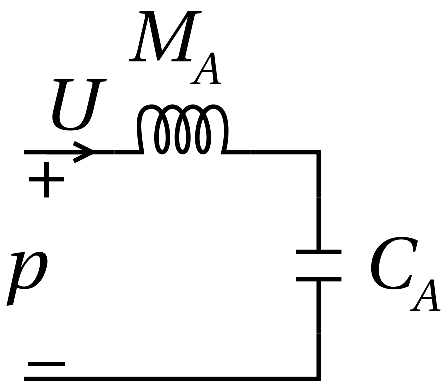


$$\widehat{Z}_A = \frac{\rho_0 c}{S}\,\frac{\widehat{Z}_{AL}\cos(k\,l) + \jmath\,\frac{\rho_0\,c}{S}\,\mathrm{sen}\,(k\,l)}{\frac{\rho_0\,c}{S}\cos(k\,l) + \jmath\,\widehat{Z}_{AL}\,\mathrm{sen}\,(k\,l)}$$

Si $\widehat{Z}_{AL} = \infty$



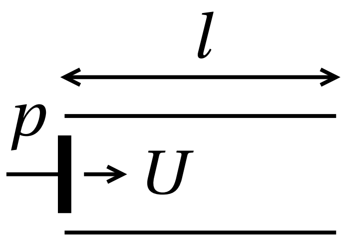
$$\widehat{Z}_A = -\jmath\,\frac{\rho_0 c}{S}\cot\left(k\,l\right) \approx \frac{\rho_0 c^2}{\jmath\,\omega\,S\,l} + \frac{\jmath\,\omega\,\rho_0\,l}{3S}$$



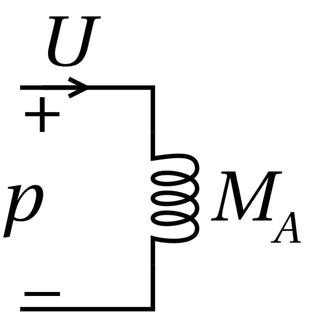
$$M_A = \frac{\rho_0\,l}{3\,S}$$

$$C_A = \frac{V}{\rho_0\,c^2}$$

Si $\widehat{Z}_{AL} = 0$



$$\widehat{Z}_A = -\jmath\,\frac{\rho_0 c}{S}\tan\left(k\,l\right) \approx \jmath\,\omega\,\frac{\rho_0\,l}{S}$$

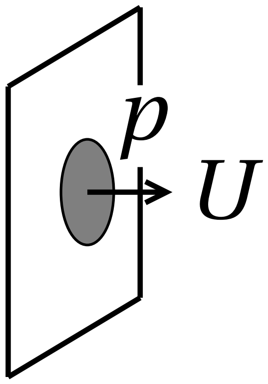


$$M_A = \frac{\rho_0\,l}{S}$$

Pistón

Es un elemento plano en el que cualquier elemento de su superficie vibra con la misma velocidad

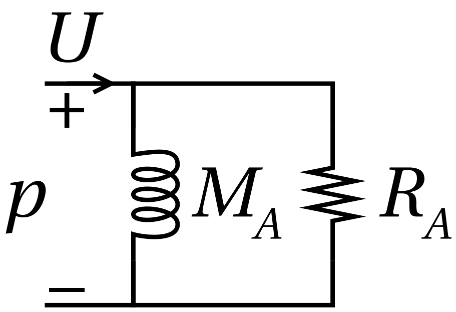
Considerando sólo un lado de un pistón plano de radio a montado en una pantalla infinita



$$\widehat{Z}_A = \frac{\rho_0\, c}{\pi\, a^2} \left[1 - \frac{J_1\,(2\,k\,a)}{k\,a}\right] + \jmath \left[\frac{H_1\,(2\,k\,a)}{k\,a}\right] \approx \frac{1}{\frac{9\,\pi^3\,a^2}{128\,\rho_0\,c} + \frac{3\,\pi^2\,a}{8\,\jmath\,\omega\,\rho_0}}$$

$J_1\,(x)$ es la función de Bessel de primer orden y primera especie, y $H_1\,(x)$ es la función de Struve de primer orden

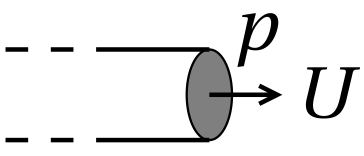
El modelo circuital resulta



$$R_A = \frac{128}{9}\,\frac{\rho_0\,c}{\pi^3\,a^2}$$

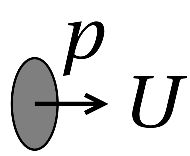
$$M_A = \frac{8}{3}\,\frac{\rho_0}{\pi^2\,a}$$

Si la configuración es la de un pistón al final de un tubo, el circuito equivalente para la impedancia de la cara exterior no cambia, tan sólo lo hacen los valores



$$\begin{aligned} R_A &= 1,5 \, \frac{\rho_0 \, c}{\pi^3 \, a^2} \\ M_A &= 1,92 \, \frac{\rho_0}{\pi^2 \, a} \end{aligned}$$

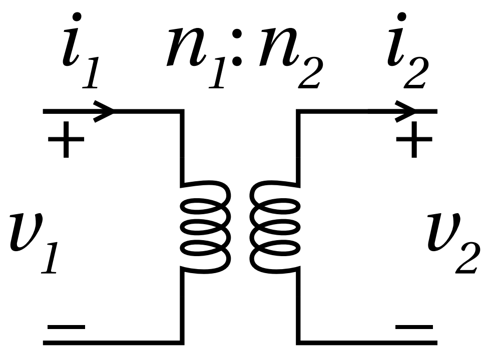
Si el pistón radia libremente, el modelo circuital para la impedancia en una de las caras tampoco cambia, pero si que lo hacen los valores



$$\begin{aligned} R_A &= 3,85 \, \frac{\rho_0 \, c^3}{\omega^2 \, a^4} \\ M_A &= \frac{8}{3} \, \frac{\rho_0}{\pi^2 \, a} \end{aligned}$$

2.6 Transformadores

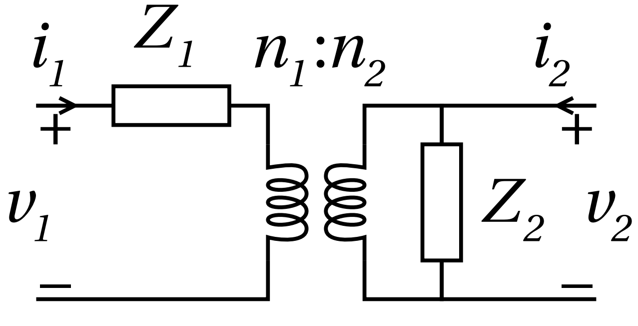
Un transformador es un dispositivo pasivo que, conservando la potencia, altera las condiciones del circuito, modificando la impedancia de carga vista desde el generador

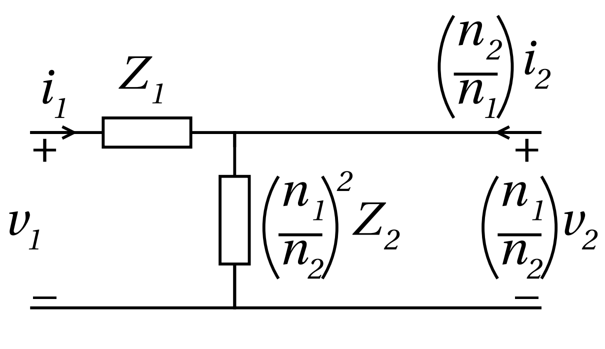


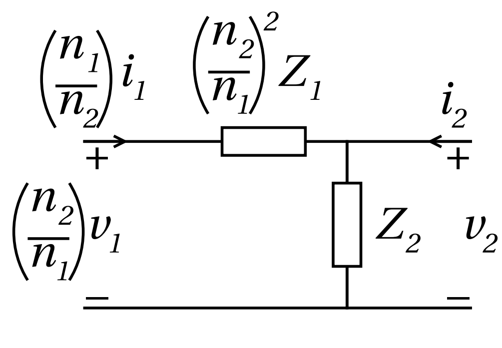
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Es posible obtener un circuito sin el transformador aplicando algunos cambios

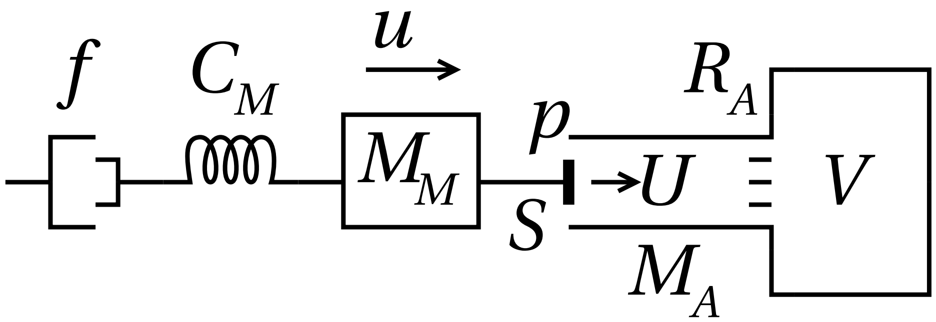


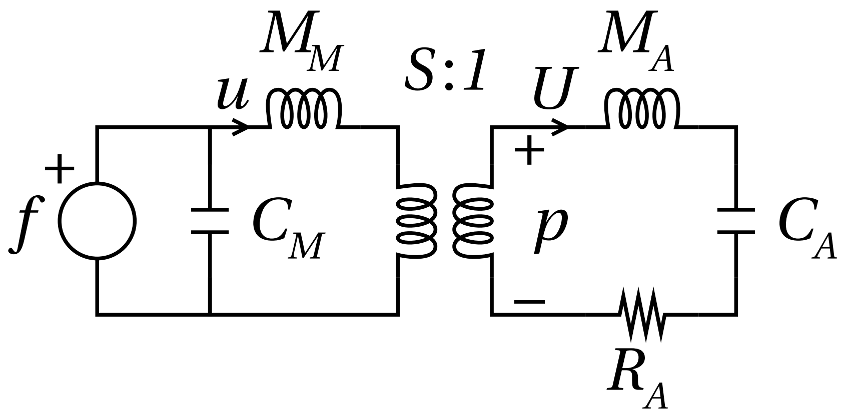


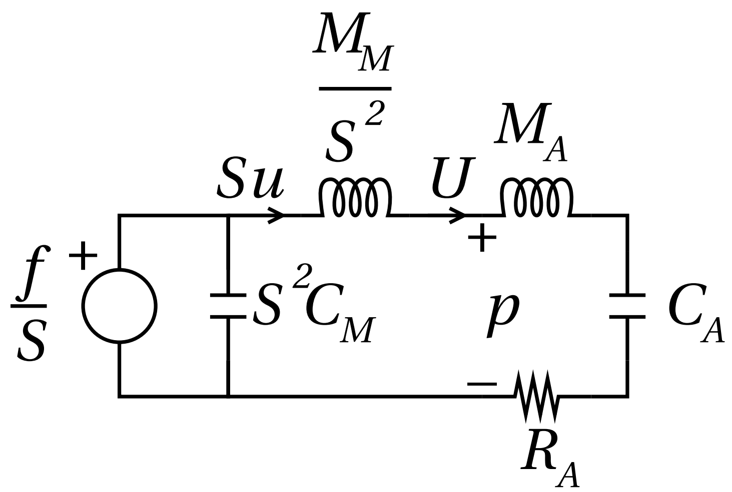


Ejemplo

Un caso típico es cuando se combinan elementos acústicos con elementos mecánicos







2.7 Cambios de analogía

En los cambios de analogía

- Los elementos en serie pasan a ser elementos en paralelo y viceversa
- Los elementos de resistencia pasan a su inversa, los de capacidad a inductancia y los de inductancia a capacidad
- La suma de caídas a lo largo de los elementos de una malla pasa a ser la suma de corrientes en un nodo y viceversa
- Los generadores de caída constante se transforman en generadores de flujo constante y viceversa

El *método del punto* facilita la realización de un cambio de analogía. Los pasos a seguir son

1. Se marca un punto en el centro de cada malla y otro fuera
2. Por cada elemento se traza una línea que lo corte, uniendo los puntos de las mallas que comparten el elemento

3. En el nuevo circuito cada línea trazada debe contener el elemento inverso al que corta en el circuito original